EXPERIENTIA

Vol. III - Fasc. 10 Pag. 385-428 15. X. 1947

Der Gruppenbegriff in der Geometrie

Von E. SCHUBARTH, Basel

So stark die mathematische Forschung sich auch verzweigt hat, ihr Aufbau ist im wesentlichen überall derselbe und durch wenige zentrale Begriffe geregelt. Im Gang der Entwicklung tritt freilich der eine oder andere besonders in Erscheinung. So ist das Kennzeichen der neueren Mathematik der Funktionsbegriff und ebenso unbestritten für die letzten hundert Jahre der Begriff der Gruppe. Seine Bedeutung für die Geometrie erkannt und dargestellt zu haben, ist das Werk FELIX KLEINS. Der vorliegende Bericht wird daher in erster Linie seinen Beitrag zur heutigen Ansicht vom Wesen der Geometrie würdigen, er soll den Ausbau und die Weiterentwicklung seiner Ansätze in den letzten Jahrzehnten aufzeigen und an Hand dieses Ausschnittes aus der Geschichte der neuesten Geometrie einen Einblick bieten in die Antriebe der mathematischen Betätigung überhaupt, an einem Thema, das durch seine Beziehung zum Raumproblem, also der Grundfrage der Geometrie, ein allgemeines Interesse beanspruchen darf.

Zum Beginn: Was ist eine mathematische Gruppe? Per Definition ein System von Elementen mit folgenden vier Eigenschaften:

1. Zwischen zwei gleichen oder verschiedenen Elementen in bestimmter Reihenfolge ist eine *Verknüpfung* erklärt, die ihnen eindeutig ein Element des Systems zuordnet.

(Man kann die Verknüpfungsoperation «Multiplikation» nennen und durch Hintereinanderstellen der beiden Elemente bezeichnen, wie es bei der gewöhnlichen Multiplikation von Zahlen üblich ist, nur ist hier die Reihenfolge zu beachten. Das den Ausgangselementen zugeordnete Element heißt dann ihr «Produkt», die Ausgangselemente «Faktoren».)

2. Die Verknüpfung ist *assoziativ*, d. h. bei mehreren Faktoren ist die Art ihrer Zusammenfassung zu Teilprodukten auf das Gesamtprodukt ohne Einfluß.

3. Es gibt ein Element, das als Faktor auf das Produkt keinen Einfluß hat, das «Einselement» der Multiplikation, und zwar für jedes Element des Systems das gleiche Einselement, die *Einheit E* der Gruppe.

4. Zu jedem Element existiert im System ein «*inverses*», dessen Verknüpfung mit dem ersten zur Gruppeneinheit führt.

Die feineren Einzelheiten, wieweit die genannten Postulate einander eventuell bedingen, lasse ich beiseite. Ich gebe sofort einige Beispiele von Elementsystemen an, die eine Gruppe bilden. Man nennt das eine Verwirklichung oder Darstellung einer abstrakten Gruppe. Die ersten entnehme ich der ebenen Geometrie.

1. Die *Verschiebungen* (Translationen) in einer vorgegebenen Parallelenschar.

Als Verknüpfung gilt das Hintereinanderschalten zweier Translationen. Ihre Assoziativität ist offenkundig. Das Einselement ist das «in Ruhe lassen», das als uneigentliche Translation hinzuzunehmen ist. Zu jeder Verschiebung gibt es die inverse, nämlich die Verschiebung von gleicher Länge, aber in umgekehrter Richtung.

2. Die *Drehungen* (Rotationen) um einen vorgegebenen Punkt bei analoger Erklärung.

Unsere Definition der Gruppen weist ferner auf eine Verwirklichung im Bereich der Arithmetik hin:

3. Die natürlichen Zahlen und die positiven Brüche, die sogenannten *positiven rationalen Zahlen* mit der gewöhnlichen Multiplikation als Verknüpfungsoperation. Das Einselement ist eben die Zahl 1. Invers zu 17 ist die zu 17 reziproke Zahl 1/17. Das Assoziativgesetz sagt aus, daß ein Produkt aus mehreren gegebenen Faktoren auch ohne Klammersetzungen eindeutig bestimmt ist.

Das Vertauschungsgesetz der Multiplikation ist dagegen bei Gruppen im allgemeinen nicht erfüllt. Wir werden sogleich an einer geometrischen Gruppe erkennen, daß die Reihenfolge der Faktoren das Produkt beeinflussen kann.

4. Die *ganzen Zahlen* ($\lesseqgtr 0$) nach der Addition verknüpft. Das Einselement ist die Zahl 0, invers zu 17 ist die entgegengesetzte Zahl -17 usw. Vergleiche die geometrische Deutung als Gruppe der Verschiebungen (Beispiel 1).

Man erkennt, daß die Erweiterungen des ursprünglichen Bereichs der natürlichen Zahlen zu dem Bereich aller ganzen und dann der rationalen Zahlen (mit dem Ziel: alle linearen Gleichungen lösbar zu machen) mit dem Gruppenbegriff zusammenhängen.

Falls ein (echter) Teil der Elemente einer Gruppe unter sich die Postulate des Gruppenbegriffs erfüllt, so heißt man das Teilsystem eine (echte) *Untergruppe* der Gesamtgruppe. So ist jede Gruppe von ebenen Translationen oder Rotationen als Untergruppe in der Gruppe aller Bewegungen in der Ebene enthalten.

Aus den Rotationen kann man einfache Beispiele *endlicher Gruppen* bilden, das sind Gruppen mit nur endlich vielen Elementen. Vier Drehungen um einen rechten Winkel ergeben eine volle Umdrehung (Fig. 1); deren Resultat ist die Figur in der Ausgangslage; d. h. die Viertelsdrehung V viermal ausgeführt, ist im Ergebnis gleichwertig mit dem Einselement E, das nichts ändert: $V\,V\,V\,V = E$.

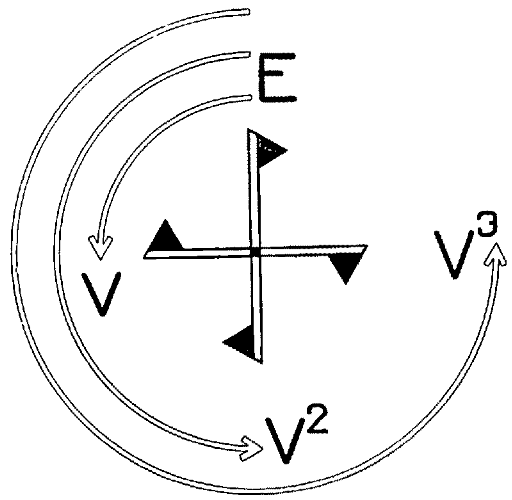


Fig. 1.

Das Element V «erzeugt» die Gruppe (V, V^2, V^3, $V^4 = E$) aus 4 Elementen.

V^3 erzeugt die gleiche Gruppe: $\left\{\begin{array}{l} V^3 \\ (V^3)^2 = V^6 \ = V^2, \\ (V^3)^3 = V^9 \ = V, \\ (V^3)^4 = V^{12} = E. \end{array}\right.$

V^2 dagegen, die Drehung um 180°, erzeugt nur die Untergruppe aus 2 Elementen der Spiegelungen an einem Punkt: (V^2, $(V^2)^2 = V^4 = E$).

Eine *nichtkommutative Gruppe* bilden schon die ebenen Bewegungen: der Endzustand nach einer Translation und nachfolgenden Rotation ist im allgemeinen verschieden von dem Zustand, den dieselben Transformationen in umgekehrter Reihenfolge erzeugen: $TR \neq RT$ (Fig. 2).

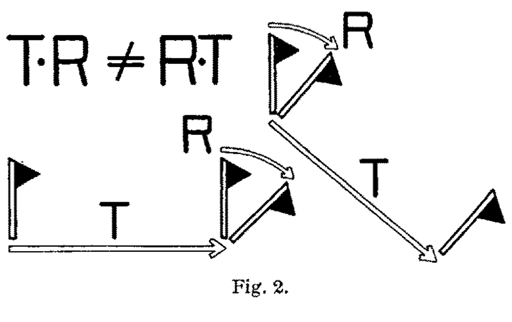


Fig. 2.

Nach dieser Einführung weise ich kurz auf einige sinnfällige Verwendungsarten der endlichen Gruppen hin sowie auf die Anfänge der Gruppentheorie in ihrer expliziten Fassung.

Im Raum sind die *endlichen Bewegungsgruppen* der mathematische Ausdruck für die Anordnungsmöglichkeiten diskret verteilter Materie in regelmäßigen Gliederungen[1]. Es gibt 230 solche Gruppen. Mit ihrer Hilfe gelingt rein deduktiv die Bestimmung der möglichen *Kristallsysteme*. Der Zusammenhang der endlichen Gruppen mit den platonischen Körpern liegt auf der Hand. FELIX KLEIN hat ihn in seiner ganzen Tiefe ausgeschöpft und zur Darstellung der Theorie der Gleichungen fünften Grades benützt[2]. Die Deckoperationen regulärer Punktsysteme bilden eben eine Gruppe, sie ist der Kern dessen, was in Mathematik und Kunst uns geistig anspricht. – Daß der Gehalt an Symmetrien in den *Ornamenten* der Ägypter und Araber ein hochentwickeltes mathematisches Gedankengut repräsentiert, hat ANDREAS SPEISER und WOLFGANG GRAESER zu eingehenden Studien veranlaßt[3]. Von den Gesichtspunkten der Gruppentheorie her hat GRAESER die Kontrapunkte der *Kunst der Fuge*[4] so geordnet, wie wir sie heute zu hören gewohnt sind, und dem Interesse für BACHS letztes Werk neue Gesichtspunkte erschlossen.

Innerhalb der Mathematik im engeren Sinn ist das Musterfeld für endliche Gruppen die Kombinatorik. Sie handelt von der Vertauschung von Elementen. Das Studium der Vertauschung von Gleichungswurzeln ist das Forschungsgebiet, in dem die Gruppen zum erstenmal durch den 1832 mit 21 Jahren im Duell gefallenen EVARISTE GALOIS explizit dargestellt worden sind. Dessen gesamte mathematischen Werke[5] bilden ein schmales Bändchen von 60 Seiten; der größere Teil dieser Abhandlungen ist erst 1846 veröffentlicht worden. Am Abend vor seinem Tod schrieb GALOIS seinem Freund AUGUSTE CHEVALIER eine gedrängte Übersicht der ihn bewegenden Gedanken nieder. Sie endet: «Tu prieras publiquement JACOBI ou GAUSS de donner leur avis, non sur la vérité, mais sur l'importance des théorèmes. Après cela, il y aura, j'espère, des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gâchis.» Wirksam geworden sind die Ideen von GALOIS tatsächlich erst gegen 1870. In diesen Jahren hat CAMILLE JORDAN seinen *Traité des substitutions* fertiggestellt, die erste zusammenfassende Darstellung der endlichen Gruppen und ihrer Verwendung in der Algebra, von ihm selbst als ein Kommentar zu GALOIS bezeichnet. FELIX KLEIN, der nachmalige große Organisator der mathematischen Forschung und des mathematischen Unterrichts in Deutschland, und der Norweger SOPHUS LIE haben um dieselbe Zeit in Paris die neuen Ideen aufgegriffen und später die Lehre von den kontinuierlichen Gruppen entwickelt, zunächst in der Form der Gruppen von Transformationen, die

[1] J. J. BURCKHARDT, Die Bewegungsgruppen der Kristallographie (1947). Birkhäuser, Basel.
[2] F. KLEIN: Vorlesungen über das Ikosaeder (1884). Teubner, Leipzig.
[3] A. SPEISER, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3. Aufl. 1937. Springer, Berlin.
[4] W. GRAESER, Bach-Jahrbuch 1924 (1925).
[5] E. GALOIS, Œuvres mathémat. (1895). Gauthier-Villars, Paris.

von stetig veränderlichen Parametern abhängen, so wie sie der üblichen Geometrie zugrunde liegen.

Nach einer gemeinsamen Arbeit von KLEIN und LIE über die Bahnkurven der projektiven Gruppe in der Ebene erschien 1872 das sogenannte *Erlanger Programm*, unter dem Titel *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, von KLEIN beim Antritt seiner Professur in Erlangen herausgegeben. Meine Absicht ist, den Inhalt dieser Programmschrift auseinanderzusetzen und die Wege anzugeben, die im Anschluß daran die Entwicklung der Geometrie genommen hat.

I.

Damals bestanden nebeneinander eine Reihe von Forschungsgebieten der Geometrie. KLEIN vermochte ihr Verhältnis untereinander abzuklären, indem er eine vertiefte Auffassung vom Wesen der Geometrie vortrug. Zur Erläuterung erinnere ich an die *Gliederung der elementaren Geometrie* in die Lehre von der *Kongruenz*, der *Ähnlichkeit* und der *affinen* oder allgemeiner der *projektiven Verwandtschaft* der zu betrachtenden Figuren. Als Muster einer solchen diene die Abbildung der Punkte einer Ebene auf eine zweite durch Strahlen, die in einem Punkt außerhalb beider Ebenen zusammenlaufen. Dabei wird z.B. ein Kreis im allgemeinen auf eine Ellipse abgebildet, wie man das aus der Perspektive gewohnt ist. Eine Kette von perspektiven Abbildungen nennt man eine projektive Transformation. Die projektive Geometrie der Ebene sucht nach solchen Eigenschaften, die einer beliebigen Originalfigur und ihrem Bilde bei projektiven Transformationen gemeinsam sind.

Damit ist am Beispiel der Zentralprojektion der Grundgedanke des Erlanger Programms bereits sichtbar geworden, nämlich: Jeder Geometrie liegt eine Gruppe von Transformationen zugrunde, die anzuwenden sind auf die Elemente, aus denen man sich den zu betrachtenden Raum aufgebaut denkt. Das können sein Punkte, Geraden, Ebenen, aber auch Kugeln oder noch andere geometrische Gebilde, ja, inhaltlich nicht bestimmte Gegenstände unseres Denkens, die lediglich die durch die Axiome unserer Geometrie geforderte Struktur zu erfüllen haben. Das die Geometrie bestimmende Element sind aber nicht die Figuren, sondern es ist die Gruppe von Transformationen, denen die Figuren unterworfen werden sollen, und was der Geometer zu kennen wünscht, das sind die unveränderlichen Eigenschaften, die «Invarianten» der Figuren. Mit den Worten KLEINS: «Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden.»

Je nach der Art der Grundgruppe werden natürlich besondere Figuren eine ausgezeichnete Rolle spielen, etwa Kreise und Kugeln bei Ähnlichkeiten, Geraden und Ebenen bei der projektiven Gruppe.

Die Transformationsgruppen für die erwähnten Zweige der Geometrie sind nun (vgl. das Schema S. 389) die folgenden:

1. Für die *Kongruenz:* die *Bewegungen* (evtl. mit Einschluß der Spiegelungen), insbesondere die Untergruppen der *Translationen* und der *Rotationen.*

Invarianten gegenüber Bewegungen sind beispielsweise: der *Winkel* je zweier Geraden, die *Länge* einer beliebigen Strecke; gegenüber Translationen außerdem: die Richtung jeder Geraden (d.h. ihr Winkel mit einer festen Richtung im Raum); gegenüber Rotationen: der Abstand jedes Punktes vom Drehpunkt.

Dagegen ist es für die Bewegungsgeometrie völlig belanglos zu wissen – wie KLEIN selbst zu exemplifizieren pflegte –, ob der Inkreismittelpunkt eines Dreiecks 3 mm östlicher liegt als der Umkreismittelpunkt.

2. Für die *Ähnlichkeitslehre* sind außer den Bewegungen noch zugelassen die *Streckungen.* Sie erzeugen aus einer Figur eine ähnliche in «perspektiver Lage». Der *Winkel* entsprechender Richtungen in Originalfigur und Bild bleibt erhalten, ebenso das *Verhältnis entsprechender Strecken*, nicht aber ihre Länge. Bewegungen und Streckungen zusammen heißen die *Ähnlichkeitstransformationen.*

3. Der *projektiven Geometrie* liegen zugrunde die *Zentralprojektionen.* Erhalten bleiben weder Winkel noch Streckenverhältnisse (um so weniger Strecken selbst), erst das «*Doppelverhältnis*» von 4 entsprechenden Strecken oder von 4 Richtungen ist eine Invariante. Oder, um an das vorige Beispiel aus der Perspektive anzuknüpfen: die Eigenschaft einer Kurve, ein Kreis zu sein, geht verloren, erhalten bleibt die umfassendere Eigenschaft, zu den Kegelschnitten zu gehören.

Durch die Willkür in der Wahl der Grundgruppe sind damit die Zweige der Elementargeometrie zu selbständigen Geometrien geworden, andererseits ist Klarheit geschaffen über die gegenseitige Stellung der über die Elementargeometrie hinausgehenden mannigfaltigen geometrischen Forschungen. Insbesondere wurde eine genaue Erklärung möglich, wie die sogenannten *nichteuklidischen Geometrien* in den Gesamtbau der Geometrie einzugliedern sind. Diese waren aus den Untersuchungen zur Axiomatik herausgewachsen, in denen man sich durch Jahrhunderte bemühte, das «Parallelenaxiom» von EUKLID aus den übrigen Axiomen zu beweisen. Der Erfolg war, daß es gelang, Modelle geometrischer Gebilde anzugeben, in denen die meisten Axiome EUKLIDS erfüllt sind, mit Ausnahme des Axioms von den Parallelen; das verlangt: Zu einer gegebenen Geraden gibt es durch einen Punkt außerhalb genau eine parallele, d.h. sie nicht schneidende Gerade. – Je nachdem zu einer gegebenen «Geraden» durch einen Punkt außerhalb von ihr keine oder mehr als eine «parallele Gerade» vorhanden sind, heißen wir heute ein solches System von Punkten und Geraden eine elliptische bzw. hyperbolische Geometrie[1].

Das am bequemsten zu übersehende *Modell* einer hyperbolischen Geometrie stammt von KLEIN (1871)[2]. Es hängt mit der projektiven Maßbestimmung von CAYLEY zusammen und besteht aus den Punkten im Innern eines Kreises als «Punkten» und aus den Sehnen des Kreises als «Geraden». Als «Bewegungen» erscheinen die projektiven Transformationen, die das Kreisinnere auf sich abbilden. Ein anderes Modell hat POINCARÉ[3] angegeben, indem er die hyperbolische Geometrie als Sonderfall der Geometrie der Kreisverwandtschaften statt der Projektivitäten deutete. Dieses Modell ist sogar, wie die Darstellung der Modellfrage überhaupt, in den *Geometrieleitfaden für schweizerische Mittelschulen* eingegangen[4].

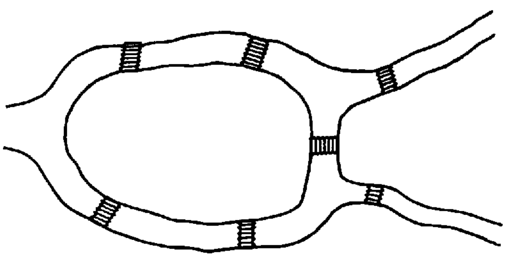


Fig. 3.

KLEINS Idee der Geometrie als der Invariantentheorie einer Grundgruppe von Transformationen ist aber mehr als ein Ordnungsprinzip. Sie vermittelt eine Einsicht in das Wesen der geometrischen Forschung und konnte daher der Anlaß zu neuen Unternehmungen sein. Man kann ja nun von beliebigen Transformationen ausgehen und die dazugehörige Invariantentheorie entwickeln. Es zeigt sich dabei, wie anderenorts, daß die für die gesamte Forschung bedeutsamen Typen nicht ins Uferlose vermehrt werden können. Neben den bereits erwähnten Geometrien verdient vor allem die *Topologie* Beachtung. Kein Geringerer als LEIBNIZ hat sie zuerst ins Auge gefaßt, und zwar unter dem Namen *Analysis situs*[5]. Es liegen ihr solche Transformationen zugrunde, die eine nach beiden Richtungen *eindeutige* und beiderseits *stetige* Abbildung hervorrufen. Diese sogenannten «topologischen Transformationen» werden wir kurz und anschaulich als «*Verzerrungen*» bezeichnen. Einige Beispiele topologischer Fragestellungen und dazugehörender Invarianten mögen ihre Bedeutung illustrieren. Die (auch historisch) ersten stammen von EULER, so das *Königsberger Brückenproblem*[1]:

Der Pregel umfließt eine Insel, genannt «der Kneiphof», und teilt sich nachher in zwei Arme. Es gibt sieben Brücken wie auf der Figur, und die Frage ist, «ob jemand seinen Spazierweg so einrichten könne, daß er jede dieser Brücken einmal und nicht mehr als einmal überschreite». EULER löst die Aufgabe für den allgemeinsten Fall, «wie auch die Gestalt des Flusses und seine Verteilung in Arme, sowie die Anzahl der Brücken ist». Ob ein einmaliger Übergang über alle Brücken möglich ist, entscheidet EULER nach folgenden Regeln (sie geben eine Vorstellung von der Eigenart des Problems): «Wenn es mehr als zwei Gebiete gäbe, für welche die Zahl der Zugangsbrücken ungerade ist, so gibt es keinen Weg von der verlangten Art. – Wenn die Anzahl der Zugangsbrücken nur für zwei Gebiete ungerade ist, so gibt es Wege, vorausgesetzt, daß man in einem dieser Gebiete beginnt. – Wenn es aber gar kein Gebiet gibt, für welches die Zahl der Zugangsbrücken ungerade ist, so kann man den verlangten Spaziergang ausführen, gleichgültig in welchem Gebiet man beginnt.» (Die Übersetzung stammt aus den *Klassischen Stücken der Mathematik* von ANDREAS SPEISER, einem eigenartigen Gegenstück ihrer musikalischen Namensvettern.)

Ein anderes Beispiel zur Topologie ist der *Eulersche Polyedersatz:*

$$e+f-k=2.$$

Die Summe aus der Ecken- und Flächenanzahl vermindert um die Kantenanzahl ist 2.

Etwa am Tetraeder: $4+4-\ 6=2$,
am Würfel: $8+6-12=2$.

Das entscheidende Merkmal für seinen Geltungsbereich ist die Zusammenhangszahl der Oberfläche. Die Kugel bietet das Muster einer Fläche mit einfachem, der Kreisring (Rettungsring) einer solchen mit dreifachem Zusammenhang. Die Zusammenhangszahl ist topologisch invariant. Die angegebenen Polyeder haben den Zusammenhang der Kugelfläche, denn sie lassen sich («topologisch») so aufblähen, bis ihre Oberfläche eine Kugel bildet. Bei einem Polyeder mit der Zusammenhangszahl z gilt

$$e+f-k=3-z.$$

Weitere topologische Invarianten sind beispielsweise die Anzahl von Schnittpunkten einer Kurve mit sich selber (falls man auf die 1-1-Deutigkeit der Transformationen des Einbettungsraumes Gewicht legt), die Orientierbarkeit oder schließlich die Dimensionszahl eines Gebildes. Der Nachweis der Invarianz ist im letzten Falle nicht einfach.

[1] W. und J. BOLYAI, Geometrische Untersuchungen, herausgegeben von P. Stäckel (1913). – N. J. LOBATSCHEFSKIJ, Zwei geometrische Abhandlungen, herausgegeben von F. Engel (1898). Teubner, Leipzig.

[2] F. KLEIN, Math. Ann. *4*, 573 (1871).

[3] H. POINCARÉ, Acta math. *1*, 1 (1882).

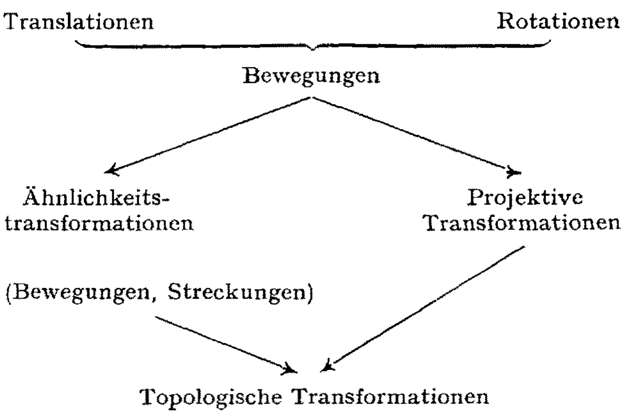
[4] F. GONSETH und P. MARTI, Leitfaden der Planimetrie II (1936). Orell Füßli, Zürich.

[5] G. G. LEIBNIZ, Math. Werke, ed. Gerhardt *5*, 178 (1858).

[1] L. EULER, Petrop. Comm. *8*, 128 (1741). – Werke (I) 7, 11 (1923), Teubner, Berlin.

Die Topologie hat im 20. Jahrhundert ihren stärksten Aufschwung genommen. RIEMANN hatte ihre umfassende Bedeutung erkannt, POINCARÉ[1] eine systematisch verwendbare Form für sie gewonnen. In ihrem algebraischen Teil treten wiederum Gruppen in Erscheinung, und zwar diskrete Gruppen. Sie finden hier nicht als Grundgruppen im Sinne KLEINS Verwendung, sondern dienen zur Definition solcher Eigenschaften der geometrischen Gebilde, die durch topologische Transformationen nicht geändert werden, daher geeignet sind, die Gebilde topologisch zu charakterisieren. Eine vollständige Kennzeichnung ist bisher nur bei allen Flächen im dreidimensionalen Raum gelungen, für Mannigfaltigkeiten von drei und mehr Dimensionen kennt man nur in besonderen Fällen ein volles Invariantensystem. So hat sich die Topologie in den letzten Jahrzehnten in engster Verbindung mit der Gruppentheorie entwickelt[2]. Erwähnt sei insbesondere, daß der Begriff der Dimension eine vertiefte Begründung erhalten hat[3].

Eine Zusammenstellung der bisher besprochenen geometrischen Gruppen zeigt die folgende Tabelle. Die Anordnung ist so getroffen, daß von oben nach unten die Gruppen immer umfassender, die Invarianten entsprechend von wachsender Bedeutung (weil immer weniger) sind. Tatsächlich kommt jede Invariante in jeder vorhergehenden Gruppe auch vor, da die vorangehenden Gruppen stets Untergruppen der nachfolgenden sind. Die Ordnung in diesem Aufbau erschließt sich ganz erst der eingehenden Betrachtung.



Die wichtigste Entdeckung KLEINS im Anschluß an CAYLEY war: Die Gruppe der *Bewegungen* läßt sich als Untergruppe aus der projektiven Gruppe aussondern, indem man solche projektive Transformationen allein zuläßt, die ein quadratisches Gebilde in sich überführen. (Sonderfälle solcher Gebilde sind die Kugel und ihre projektiven Bilder, unter Einschluß des Imaginären.) Je nach der Art des invarianten quadratischen Gebildes erhält man die Bewegungen der euklidischen oder einer der nichteuklidischen Geometrien, wobei der euklidische Fall eine Ausartung darstellt. (Vgl. das KLEINsche Modell mit invariantem Randkreis.)

Ehe wir die Auswirkung der Idee FELIX KLEINS weiterverfolgen, sei noch auf eine einfache geometrische Charakterisierung der projektiven und der Ähnlichkeitstransformationen hingewiesen. Die Projektivitäten des dreidimensionalen Raumes sind genau diejenigen Punkttransformationen, die *Geraden wieder in Geraden* überführen, ebenso Ebenen in Ebenen – allgemein in Räumen von beliebiger Dimensionszahl lineare Teilräume in solche gleicher Dimension. In kartesischen Koordinaten werden daher die projektiven Abbildungen durch lineare (im allgemeinen gebrochene) Funktionen dargestellt. Diese Tatsache macht sie zu einem besonders wichtigen Gegenstand der Forschung. Die Ähnlichkeitstransformationen andererseits sind diejenigen Punkttransformationen des dreidimensionalen Raumes, die *Kugeln in Kugeln* überführen. Sie sind in Räumen von drei und mehr Dimensionen die einzigen konformen Abbildungen, d.h. solche, die die Winkel ungeändert lassen.

Besondere Beachtung verdient schließlich die Tatsache, daß bei geeigneter Wahl des Raumelements die genannten Geometrien alle als Invariantentheorie einer *linearen* Grundgruppe erscheinen in Räumen höherer Dimensionszahl. Während beispielsweise die konformen Transformationen des dreidimensionalen Punktraums durch quadratische Funktionen der Punktkoordinaten darzustellen sind, werden die analytischen Ausdrücke für dieselben Transformationen linear, wenn man als Elemente des Raumes nicht die Punkte, sondern die Kugeln zugrunde legt. Im Falle der Kreisverwandtschaften in der Ebene kann man das bequem durch eine geeignete Abbildung verfolgen. Man denke sich die Ebene der Kreise als Tangentialebene im Südpol eines Globus. Eine Zentralprojektion vom Nordpol aus ordnet jedem Punkt der Ebene (außer dem Nordpol) den zweiten Schnittpunkt des Projektionsstrahls mit dem Globus zu. Die Kreise in der Ebene werden dabei auf Kreise in der Kugelfläche abgebildet; diese werden aber aus der Kugel durch Ebenen des Umgebungsraumes ausgeschnitten. Daher ist die Gruppe der Kreisverwandtschaften in der Tangentialebene «isomorph» der Gruppe von linearen Transformationen des dreidimensionalen Raumes, die den Globus in sich transformieren. Diese beiden Gruppen sind ihrer Struktur nach, als abstrakte Gruppen, überhaupt nicht zu unterscheiden. Die methodische Wichtigkeit solcher Übertragungen, wie sie das letzte Beispiel zeigt, ist besonders augenfällig.

Wir sind nun wiederholt Transformationen begegnet, die eine krumme Linie oder Fläche in sich überführen. Mit der *Kurvenkrümmung* befassen sich bereits die Erfinder der Differentialrechnung, als erster HUYGENS. Die genaue Fassung des Begriffs der *Flä-*

[1] H. POINCARÉ, J. école polyt. (2) *1*, 1 (1895).
[2] H. SEIFERT und W. THRELFALL, Lehrbuch der Topologie (1934). Teubner, Leipzig.
[3] W. HUREWICZ und H. WALLMANN, Dimension Theory (1941). Princeton University Press, Princeton.

chenkrümmung verdankt man GAUSS[1] und ihre Erörterung bei Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension RIEMANN[2]. Die Krümmung ist offenbar eine echt geometrische Eigenschaft, also ein weiteres Beispiel einer Bewegungsinvarianten; allerdings gehört sie, verglichen mit den früher erwähnten, zu einer andersartigen Klasse, den sogenannten *Differentialinvarianten*. Mit ihnen beschäftigt sich die Differentialgeometrie, das ist die Geometrie, insofern sie ihre Gegenstände in einem beschränkten Gebiet behandelt und darauf die Methoden der Infinitesimalrechnung anwendet. Es leuchtet ein, daß gerade in dieser Hinsicht die Ideen des Erlanger Programms ein gewaltiges Arbeitsfeld erschlossen haben: Konnte man doch systematisch die seit EULER bis zu RIEMANN gewonnenen Erkenntnisse aus der Differentialgeometrie der Bewegungsgruppe auf die anderen geometrischen Gruppen übertragen. Während aber schon KLEINS Programmschrift selbst zunächst keinen starken Widerhall auslöste – KLEIN hat sie zwanzig Jahre nach ihrem Erscheinen in den *Mathematischen Annalen*[3] wieder abgedruckt –, ließ die Bearbeitung der Differentialgeometrie nach seinen Gesichtspunkten weitere Jahrzehnte auf sich warten. Immerhin hat die *projektive Differentialgeometrie* der Kurven bereits in den siebziger Jahren durch HALPHEN eine Bearbeitung erfahren, im Anschluß an die Invariantentheorie der linearen Differentialgleichungen. LIE und DARBOUX brachten Ansätze zu einer projektiven Flächentheorie, Amerikaner, Italiener und Tschechen haben sie weiter ausgebaut. Eine breitangelegte Bearbeitung setzte während des ersten Weltkrieges in Deutschland unter der Führung von BLASCHKE ein. Er hat mit vielen Mitarbeitern der Reihe nach die affine, die konforme und die topologische Gruppe zum Gegenstand differentialgeometrischer Untersuchungen gemacht. Im letzten Fall sind besondere Voraussetzungen über die Differenzierbarkeit der Abbildungsfunktionen hinzuzunehmen – während die Ergebnisse auch wieder Licht werfen auf Fragen der Axiomatik, z.B. wo von diesen engeren Voraussetzungen nicht mehr die Rede ist. Tatsächlich hat die Erforschung der Grundlagen der Geometrie von hier aus einen starken neuen Antrieb erfahren. Das bezeugen die in zusammenfassenden Darstellungen vorliegenden Untersuchungen von THOMSEN und REIDEMEISTER, die HILBERTS grundlegendes Werk entscheidend weiterführen und wiederum auf die Theorie der Gruppen zurückstrahlen[4]. – Undenkbar wäre ferner ohne KLEINS bahnbrechende Arbeit und ihren Niederschlag in der Mathematikergeneration der Jahrhundertwende die mathematische Formulierung der Relativitätstheorie und deren Wirkung auf Fachleute und Laien in der Nachkriegszeit. KLEIN selbst hat diese Entwicklung in Vorlesungen nachgezeichnet, die nach seinem Tode als einzigartige Problemgeschichte der Mathematik im 19. Jahrhundert herausgekommen sind[1].

[1] C. F. GAUSS, Comm. Soc. reg. Gottingensis rec. Vol. VI ad a 1823–27. Werke *4*, 220.

[2] B. RIEMANN, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen (Habilitationsschrift 1854). – Math. Werke, 2. Aufl., 172 (1872).

[3] F. KLEIN, Math. Ann. *43*, 63 (1893).

[4] W. BLASCHKE und G. BOL, Geometrie der Gewebe (1938). Springer, Berlin. – D. HILBERT, Grundlagen der Geometrie (1. Aufl. 1899). Teubner, Leipzig – K. REIDEMEISTER, Grundlagen der Geometrie (1930). Springer, Berlin, – H. THOMSEN, Grundlagen der Elementargeometrie (1933). Teubner, Leipzig.

II.

Man sollte meinen, daß mit der gründlichen Abklärung des Begriffs der Geometrie und den geschilderten Auswirkungen die Bedeutung des Erlanger Programms erschöpft sei. Tatsächlich wird es aber, solange eine geometrische Forschung besteht, immer neu zur Geltung kommen. Ein wichtiges derartiges Beispiel ist bereits zu verzeichnen. Ihm soll der letzte Teil meines Berichtes gewidmet sein.

Vorausschicken muß ich eine Erörterung des Parallelismus. Sie wird uns mit einigen Hauptfragen der Differentialgeometrie bekannt machen. Wir haben schon gesehen, welch hervorragende Stelle in der Geometrie der Parallelenbegriff einnimmt. Parallel nannten wir bisher (mit EUKLID) zwei Geraden, wenn sie keinen Schnittpunkt haben. Wir können aber auch auf die Eigenschaft abstellen, daß sie die Bahnkurven ein und derselben Translation sein sollen. Es gibt Geometrien, in denen die beiden Erklärungen nicht dasselbe treffen. In unserem Zusammenhang wird die zweite besonders interessieren, da sie den Parallelismus mit einem wichtigen Begriff der Gruppentheorie verbindet.

Es ist eine bedeutende und auch dem Nichtfachmann erklärbare Frage der Bewegungsgeometrie, welche Richtungen auf einer gekrümmten Fläche als parallel gelten sollen. Der *Parallelismus auf einer Fläche* hat vor einem Vierteljahrhundert eine Erklärung erfahren, die, wie wir sehen werden, mit der Gruppentheorie aufs engste verknüpft werden kann. Sie stammt von LEVI-CIVITÀ[2] und gleichzeitig von HESSENBERG[3] und enthüllt den geometrischen Gehalt des von RICCI und LEVI-CIVITÀ um 1900 geschaffenen sogenannten «absoluten Differentialkalküls», der (als Tensorkalkül) einen großen Teil der heutigen mathematischen Physik beherrscht.

Wir brauchen einige elementare Kenntnisse aus der Flächenlehre. Die Krümmung einer Fläche in einem vorgegebenen Punkt ist nicht nur invariant gegen Bewegungen der starren Fläche. Sie bleibt auch erhalten bei einer Flächen*verbiegung*. Das ist die fundamentale Entdeckung, die GAUSS in seinen *Disquisitiones*

[1] F. KLEIN, Die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert (1926). Springer, Berlin.

[2] T. LEVI-CIVITÀ, Rend. Circ. Mat. de Palermo *42*, 173 (1917); Lezioni di calcolo differenziale assoluto (1925). Stock, Roma (Deutsche Ausgabe: Springer, Berlin 1928).

[3] G. HESSENBERG, Math. Ann. *78*, 187 (1917).

circa superficies curvas dargestellt hat (erschienen 1827). Die Krümmung ist damit als eine Eigenschaft der *inneren Geometrie* der Fläche erkannt, die unabhängig ist von ihrer Einbettung im umgebenden Raum von drei Dimensionen, wenn Gauss diesen auch noch zur Herleitung seiner Ergebnisse benützt hat. Alle Flächenstücke, die sich ohne Verzerrung auf die Ebene «abwickeln» lassen, und nur diese haben demnach überall die gleiche Krümmung 0 wie die Ebene, z.B. Stücke eines Kreiskegels oder Kreiszylinders (und zwar in jeder Faltung, die wir dem aufgeschnittenen Mantel geben mögen).

Für ein *abwickelbares Flächenstück* erklärt nun Levi-Cività: Eine Flächenrichtung (d.h. Tangentenrichtung an eine Flächenkurve) soll *parallel* heißen zu einer Flächenrichtung in einem zweiten Flächenpunkt, wenn bei der Abwicklung der Fläche auf eine Ebene die Bilder der beiden Flächenrichtungen im gewöhnlichen Sinn parallel werden.

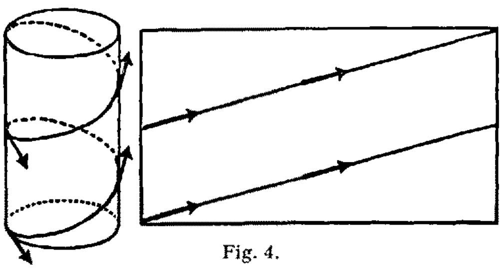


Fig. 4.

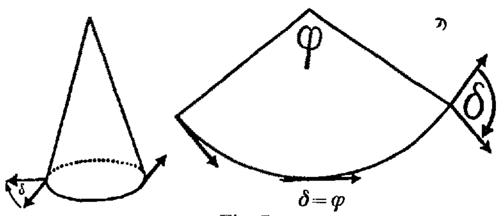


Fig. 5.

Beispiele (Fig. 4 und 5):

1. Eine Schraubenlinie auf einem Kreiszylinder wird in der Abwicklung des Zylinders eine Gerade. Die Tangentenrichtungen längs der Schraube sind also untereinander flächenparallel (obwohl nicht parallel im umgebenden Raum).

2. Kreiskegelmantel: Überträgt man eine Tangentenrichtung an den Randkreis flächenparallel dem Rand entlang bis zum Ausgangspunkt zurück, so erfährt sie eine Abdrehung, die aus der Abwicklung des Mantels zu ersehen ist. (Sie ist gleich dem Netzwinkel.)

Der so erklärte Parallelismus ist offenbar invariant gegen Verbiegungen der Fläche, denn die Abwicklung ist selbst eine Verbiegung. Aber eine Übertragung des Flächenparallelismus auf nichtabwickelbare Flächen scheint nach der Definition von Levi-Cività zunächst nicht möglich. Hier setzt ein neuer Gedanke ein mit einer Verallgemeinerung, die – wie der weitere Verlauf zeigt – genau das Wesentliche trifft. Auf einer *nichtabwickelbaren Fläche,* erklärt Levi-Cività weiter, kann man den Parallelismus wie vorhin wenigstens *längs einer Kurve* definieren. Denn die Tangentialebenen der Fläche längs irgendeiner Flächenkurve umhüllen eine abwickelbare Fläche; wir wollen sie die *Hüllfläche* längs dieser Kurve nennen. Für die Hüllfläche sei nun der Parallelismus wie vorhin erklärt mit Hilfe ihrer Abwicklung auf eine Ebene. Welche Richtung in einem Punkt zur gegebenen Richtung in einem anderen Punkt parallel heißen soll, hängt jetzt vom Weg auf der Fläche zwischen den beiden Punkten ab, längs dessen die für die Erklärung paralleler Richtungen maßgebende Hüllfläche zu bilden ist. Setzt man zwei verschiedene Wege auf der Fläche von ein und demselben Anfangspunkt nach dem gleichen Endpunkt zu einem geschlossenen Weg zusammen, so wird nach dem Umfahren dieses geschlossenen Weges eine bestimmte Ausgangsrichtung in eine andere abgedreht erscheinen, außer wenn das Flächenstück überall das Krümmungsmaß 0 der Ebene hat und daher auf diese abwickelbar ist. Diese Überlegungen lassen überraschend einige Kernstücke der klassischen Flächentheorie in neuem Licht erscheinen[1]. So wird die *Flächenkrümmung* durch ein Verfahren der inneren Geometrie der Fläche erfaßt; sie erweist sich nämlich als Grenzwert des Quotienten aus der Abdrehung und dem Inhalt des umfahrenen Flächenstücks, wenn man die Randkurve auf den betreffenden Punkt zusammenzieht. Andererseits ergeben sich frappante Erklärungen für besondere Klassen von Flächenkurven; ihre Eigenheiten werden durch den Begriff der infinitesimalen Parallelverschiebung unmittelbar in Evidenz gesetzt. Hierfür zwei Beispiele:

1. *Geodätische Linien* sind solche, die man beschreibt, wenn man von einem Punkt der Fläche sich stets flächenparallel zur Ausgangsrichtung fortbewegt; sie sind also die Bahnkurven einer Parallelverschiebung auf der Fläche, entsprechend der euklidischen Definition der Geraden in der Ebene. Eine geodätische Linie wird nämlich bei der Abwicklung der ihr zugeordneten Hüllfläche zu einer Geraden.

2. *Asymptotenlinien* sind dadurch ausgezeichnet, daß längs solchen Flächenkurven flächenparallele Richtungen zugleich parallel im Einbettungsraum sind; aus diesem Grund ist z.B. jede Gerade auf einer Fläche Asymptotenlinie.

Rekapitulieren wir den Grundgedanken an einem aktuellen Beispiel: Welche Richtungen sollen wir in Bern und in Moskau parallel nennen? Die gewohnte Gleichsetzung der Nordrichtungen an verschiedenen Orten der Erdoberfläche ist willkürlich mit den geographischen Koordinaten verbunden und fließt keineswegs aus der inneren Geometrie der Kugelfläche. Sie

[1] Vgl. H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, 5. Aufl. 1923, Springer, Berlin. S. 325, Anmerkung 9 zu Kap. II.

versagt ja auch an den «Polen», trotzdem diese nicht geometrisch, sondern physikalisch, bei der Erdrotation, ausgezeichnet sind. Tatsächlich kann man die Richtungsrose in Bern nicht unmittelbar vergleichen mit der in Moskau, weil die beiden nicht in der gleichen Tangentialebene der Erdkugel liegen. Dagegen ist es eine der Geometrie auf der Kugel gemäße Festsetzung, wenn wir die Tangentenrichtungen längs des gemeinsamen Großkreises zwischen Bern und Moskau parallel nennen. Denn die zu ihm gehörende Hüllfläche ist ein Zylinder, der mit ihr in die Ebene abgewickelte Großkreis eine Gerade. Die so erklärte geodätische Richtungsübertragung ist nicht vom Wege unabhängig: nach dem Umfahren eines geschlossenen Vielecks mit geodätischen Seiten, z.B. eines Großkreisdreiecks, erscheint die Ausgangsrichtung abgedreht um einen Winkel proportional der umfahrenen Fläche. Die Abhängigkeit der Richtungsübertragung vom durchlaufenen Weg ist der innergeometrische Ausdruck für die Tatsache, daß ein Kugelstück nirgends die Krümmung 0 hat und daher nicht ohne Verzerrung sich auf die Ebene abwickeln läßt.

III.

Was haben diese Erörterungen über Parallelverschiebung auf einer Fläche mit unseren Betrachtungen über Gruppen in der Geometrie zu tun? Nachdem besonders Hermann Weyl die Bedeutung der Entdeckung von Hessenberg und Levi-Cività hervorgehoben und eine erste Verallgemeinerung angegeben hatte, die ihm den Einbau des elektromagnetischen Feldes in die Metrik der Relativitätstheorie zu ermöglichen schien, ist es dem bedeutendsten neueren Geometer, Elie Cartan, gelungen, in folgender Weise den Zusammenhang klarzustellen und noch umfassender systematisch zu verarbeiten[1]:

Die «Abwicklung» einer Fläche (der Hüllfläche bei Levi-Cività) ist eine Abbildung der Umgebung unserer Verschiebungskurve auf eine Ebene, wenn man will auf die Tangentialebene der ursprünglichen Fläche im Anfangspunkt der Verschiebung, und zwar eine Abbildung mittels Transformationen der Bewegungsgruppe. Diese Deutung der «Parallelverschiebung» war für Cartan der Angelpunkt zur Überwindung einer ernsthaften Schwierigkeit, die sich beim Versuch, die Ansichten von Riemann mit der Kleinschen Idee der Geometrie zusammenzubringen, ergibt.

Eine krumme Fläche ist ein anschauliches Beispiel für das, was die Mathematiker einen *Riemannschen Raum* nennen, und wie er z.B. — mit der Dimensionszahl 4 — in der Relativitätstheorie verwendet wird. In einem solchen zweidimensionalen Riemannschen Raum, also einem gewöhnlichen Flächenstück mit von Punkt zu Punkt wechselnder Krümmung, ist es nicht möglich, nach Kleins Idee eine innere Geometrie zu erklären durch die Forderung, man solle auf seine Punkte eine Bewegungsgruppe anwenden. Denn es steht kein *homogener* zweidimensionaler Raum zur Verfügung, in dem die Transformationen zur Anwendung kommen könnten — im Gegensatz zum dreidimensionalen euklidischen Einbettungsraum, in dem eine Differentialgeometrie der Flächen in der vorher geschilderten Weise erklärbar ist.

Die Forderung der *Homogenität* — im Sinne der freien Beweglichkeit starrer Körper — hat schon Riemann[1] und Helmholtz[2] zu eingehenden Untersuchungen veranlaßt, und Lie[3] hat das Ergebnis von Helmholtz mit exakteren mathematischen Hilfsmitteln bestätigt und auf beliebig viele Dimensionen erweitert. Die verlangte Homogenität für eine Bewegungsgruppe besitzen danach nur die Riemannschen Räume konstanter Krümmung; je nachdem die Krümmung 0, größer oder kleiner als 0 ist, sind euklidische, elliptische oder hyperbolische Bewegungen möglich[4].

Die Abwicklung der Hüllfläche bei Levi-Civitàs Erklärung des Flächenparallelismus ist ein besonderer Fall des Verfahrens, nach dem Cartan allgemein vorgeht, um inhomogene Räume dem Gedanken Kleins zugänglich zu machen. Ich erkläre wieder am Beispiel von zwei Dimensionen. Cartan ordnet jedem Flächenpunkt eine homogene Ebene zu, die den Flächenpunkt enthält (z.B. die Tangentialebene), und führt diese Ebenen in verschiedenen Flächenpunkten sukzessive durch eine Abbildung längs eines beliebigen Weges in der Fläche aufeinander zurück, so daß ein Flächenstreifen in der Nachbarschaft dieses Weges in diejenige homogene Ebene abgebildet wird, die dem Anfangspunkt zugeordnet war. Diese bildet das Operationsfeld für eine Transformationsgruppe, deren Invariantentheorie zu studieren ist. Im Sinne des Erlanger Programms kann die Grundgruppe irgendeine geometrische Gruppe sein und dementsprechend hat dann auch die besprochene Abbildung des Flächenstreifens mit Transformationen dieser Gruppe zu geschehen (statt mit Kongruenztransformationen wie bei Levi-Cività).

Ein mit einem solchen Abbildungsgesetz ausgestatteter Raum heißt ein *Cartanscher Raum*, je nach der verwendeten Grundgruppe bezeichnet man ihn als mit einem euklidischen, affinen, konformen oder projektiven *Zusammenhang* versehen. Die Transformation, die ein Punkt in der ihm zugeordneten homogenen Ebene erfährt, wenn man die Abbildungen sukzessiv längs eines geschlossenen Weges ausführt, ist natürlich in der Grundgruppe enthalten, und die so erzeugten Transformationen, die allen möglichen Um-

1 E. Cartan, C. R. Acad. Sci. *174*, 593 (1922).

1 B. Riemann, l. c.

2 H. v. Helmholtz, Nachr. K. Ges. Wftn. Göttingen, math. phys. Kl., 1868. = Wissenschaftl. Abh. *2*, 618 (Leipzig 1883).

3 S. Lie und F. Engel, Theorie der Transformationsgruppen. 1888–93. Teubner, Leipzig.

4 Vgl. H. Weyl, Mathematische Analyse des Raumproblems. (1923). Springer, Berlin. – Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft. 1927. Handbuch der Philosophie, Abt. II A. Clambourg, München.

läufen vom selben Punkt aus entsprechen, bilden daher insgesamt eine Untergruppe der Grundgruppe. CARTAN nennt sie die *Holonomiegruppe* des Raumes – sie ist für alle seine Punkte dieselbe. Sie ist ein Ausdruck für den Grad seiner Inhomogenität und beschreibt seine Abweichung vom KLEINschen Typus. Sonderfälle CARTANscher Räume sind der euklidische Raum, wo die Holonomiegruppe aus der identischen Transformation allein besteht, und die Räume von RIEMANN, wo die Holonomiegruppe nur Rotationen, aber keine Translation enthält, wie wir es bei der Parallelverschiebung nach LEVI-CIVITÀ beschrieben haben. In weitere Einzelheiten einzudringen ist hier nicht der Ort[1].

Dagegen darf ich wohl zum Abschluß auf eine besondere Leistung CARTANS (zusammen mit dem Holländer SCHOUTEN) aufmerksam machen, weil sie einen für die Denkweise des Mathematikers typischen «Rückschluß» zeigt: die Anwendung der gewonnenen Theorie auf die Ausgangselemente, das sind hier die Gruppentransformationen. Es steht nichts im Weg, die Transformationen einer Gruppe selbst als Punkte der sogenannten *Gruppenmannigfaltigkeit* zu untersuchen[2]. So bilden z.B. die Bewegungen in der Ebene eine Gruppe mit drei Parametern, d.h. frei veränderlichen Bestimmungsstücke, zwei davon für die Translationen, einen für die Rotationen, und sind also durch die Punkte eines dreidimensionalen Raumes darstellbar. Im Gruppenraum werden mit Hilfe der jeder kontinuierlichen Gruppe zugeordneten zwei Parametergruppen drei Arten von Parallelismen definiert. In ihren Eigenschaften spiegelt sich der größte Teil der sogenannten Hauptsätze von SOPHUS LIE aus der Theorie der kontinuierlichen Gruppen wider und präsentiert sich so in geometrischem Gewand. Als geodätische Linien im Gruppenraum erscheinen die Punktmengen, die zu den Transformationen der einparametrischen Untergruppen der Ausgangsgruppe gehören; sie übernehmen die Rolle der Geraden und erfüllen bei geeigneter Interpretation sogar die vierte Definition im I. Buch der *Elemente* von EUKLID: «Gerade ist eine Linie, die zu ihren Punkten gleichmäßig (ἐξ ἴσου) liegt.»

Die CARTANschen Räume haben bisher besonders in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen Verwendung gefunden. Es ist zu vermuten, daß ihre Bedeutung eines Tages, wenn sich die Physik wieder intensiver der Betrachtung des Kontinuums zuwendet, in einem weiteren Umfang sichtbar wird.

In einem Rückblick stellen wir fest, daß der Gruppenbegriff uns zunächst als ordnendes Prinzip begegnet ist, aber darüber hinaus sich als integrierender Bestandteil für die Konstituierung des geometrischen Raumes erwiesen hat. Das zeigten bereits die Untersuchungen von HELMHOLTZ und LIE, die späteren bestätigen es in einem neuen Ausmaß. Man ist versucht, im Gruppenbegriff einen Ausfluß zu sehen aus jenem «Entwurf der Vernunft», von dem KANT in einprägsamer Vereinfachung gesagt hat, daß wir ihn nicht aus den Gegenständen herausholen, sondern ihn in diese hineinlegen. Er ist, wie die reinen Verstandesbegriffe KANTS, «nicht bloß ein Vermögen, durch Vergleichen der Erscheinungen sich Regeln zu machen; er ist *selbst die Gesetzgebung vor die Natur*».

Wenn ohne die genaue Kenntnis der historischen Situation diese Worte KANTS vielleicht mißverständlich sein mögen, so ist doch auf eine andere Analogie hinzuweisen erlaubt. So wie es KANT darauf ankam, die «Vernunft» gegen eine rein rationalistische Position abzuheben, so dürfte ein Überblick wie der eben vorgenommene geeignet sein, eine Vorstellung davon zu vermitteln, daß die Arbeit des Mathematikers nicht allein in der Logik der Begriffe verankert ist, wenn auch das fixierte System, das er als Ergebnis anbietet, und die schulmäßige Einübung seiner Methoden den Außenstehenden allzu leicht zu diesem Urteil verleiten können.

[1] Vgl. E. CARTAN, Selecta (1939). Gauthier-Villars, Paris.

[2] E. CARTAN, J. Math. *6*, 1 (1927).

Summary

(I) In the *Erlanger Programm* (1872) FELIX KLEIN gives a new definition of geometry as a theory of invariants of a transformation-group. In this way a method was given which classifies by a common point of view the different branches of the elementary geometry (of congruent, affine, projective, conform transformations). Moreover KLEIN gave a more detailed description of the essential character of a geometrical theory, discovering a common property of their different realizations. KLEIN was able to subordinate the non-euclidean geometry under projective geometry with the aid of CAYLEY's theory of quantics. KLEIN's conception turns out to be very prolific in the development of topology and in the systematical exploration of differential geometry corresponding to different groups and so it was fundamental to the mathematical theory of relativity.

(II) The notion of parallelism in a space with curvature different from zero was introduced by HESSENBERG and LEVI-CIVITÀ (1917). We can describe the essential idea by surfaces in an euclidean space: this parallelism is (a) absolute, when the surface has a curvature equal to zero, (b) a «parallelism along a curve» in the other case.

(III) KLEIN's idea is applicable only to spaces having constant curvature. The conception of parallelism by LEVI-CIVITÀ was further developed by E. CARTAN in a form which makes it possible to extend KLEIN's point of view to more general spaces. CARTAN's spaces appear in the theory of continuous groups, they allow us to find a geometrical form of the theory due to S. LIE. We know therefore that the notion of group is an essential part in constituting mathematical space.